Μάθημα 1ο

• Η αρχή της στάσιμης δράσης.

Ορίζουμε τη δράση: $S=\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$, όπου L η συνάρτηση Lagrange.

Με $L=T-V$, T: κινητική ενέργεια, V: δυναμική ενέργεια.

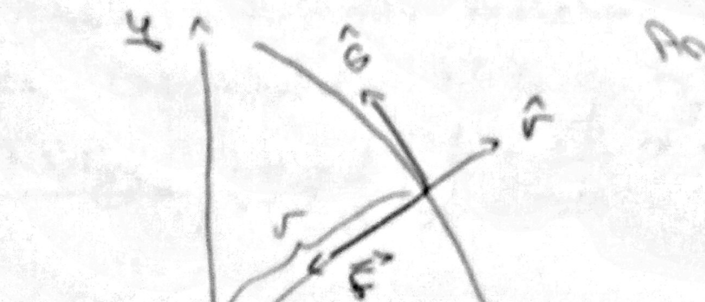
● Παρατήρηση:

Η ολική ενέργεια του συστήματος $E=T+V$

Συνήθως η ποσότητα E διατηρείται και καλείται ολοκλήρωμα ή σταθερά της κίνησης.

Παράδειγμα:

● Κεντρικές Δυνάμεις



Από τον νόμο του Νεύτωνα

$F_R = -f(r)\hat{r} = m a_R = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

$F_\theta = 0 = m a_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$

Κινητική Ενέργεια

$$T = \frac{1}{2} m v_r^2 = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

Δυναμική Ενέργεια

$V = V(r)$ Προσοχή: $V = -V(r)$

άρα $L = T - V = T + V(r)$

Σχέση:

κεντρικές δυνάμεις: $F = -\dfrac{dV}{dr}$

Άρα:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r)$$

Εξισώσεις Euler:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \theta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{2} m 2r\dot{\theta}^2 + \frac{dV}{dr} - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m 2\dot{r}\right) = 0$$

$$\Rightarrow m r\dot{\theta}^2 + \frac{dV}{dr} - m\ddot{r} = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} - m r\dot{\theta}^2 = \frac{dV}{dr} = -f(r) \Rightarrow \boxed{m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -f(r)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow 0 - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ① \text{ Η ποσότητα } \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \text{σταθερή} \\ ② \ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2} m r^2 2\dot{\theta}\right) = 0 \Rightarrow m(2 r \dot{r} \dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

- Το δύσκολο κομμάτι είναι να βρούμε το τετράγωνο της ταχύτητας στα διανύσματα της κίνησης που εδώ είναι το $\hat{r}$ και $\hat{\theta}$.

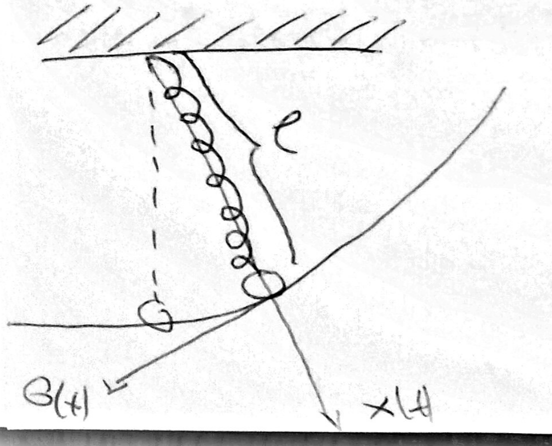
- Είτε το λύσουμε με φορμαλισμό Lagrange είτε με τις εξισώσεις του Νεύτωνα θα πρέπει να βρούμε το ίδιο πρόβλημα.

<u>Παράδειγμα</u>

- <u>Εκκρεμές ελατήριο</u>

Εκκρεμές ελατήριο φυσικού μήκους l αντικαθιστά νήμα εκκρεμούς. Ν.Β. οι εξισώσεις κίνησης.

<u>Λύση</u>



Κινητική Ενέργεια

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m\underbrace{\omega^2}_{\text{ακτινική ταχύτητα}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m\underbrace{(l+x)^2}_{r^2}\dot{\theta}^2 \quad , \quad \omega = (l+x)\dot{\theta}$$

Δυναμική Ενέργεια

Έχω δύο δυναμικές ενέργειες:

Μία από το νόμο του Hook: $V = \frac{1}{2}kx^2$

Και τη δυναμική ενέργεια λόγω απόκλισης από το φυσικό μήκος του εκκρεμούς: $mg(l+x)\cos\theta$

Οπότε:

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - mg(l+x)\cos\theta$$

Λαγκρανζιανή:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m(l+x)^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + mg(l+x)\cos\theta$$

Δύο εξισώσεις Euler:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \theta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m 2(l+x)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k 2x + mg\cos\theta - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m 2\dot{x}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x} = m(l+x)\dot{\theta}^2 - kx + mg\cos\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow -mg(l+x)\sin\theta - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m (l+x)^2 2\dot{\theta}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -mg(l+x)\sin\theta - m\frac{d}{dt}\left[(l+x)^2\dot{\theta}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-mg(l+x)\sin\theta - m2(l+x)\dot{x}\dot{\theta} - m(l+x)^2\ddot{\theta} = 0}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

① Α είχα λόγο το ελαφρετές, τότε:

k: σταθερά ελατηρίου και x θα είναι μηδέν.

<u>Τότε:</u>

$$\begin{cases} ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = 0 \\ -\cancel{m}gl\sin\theta - ml^2\ddot{\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\dot{\theta})^2 + \frac{g}{l}\cos\theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

② Αν έλειπε το εκκρεμές και είχατε μόνο το ελατήριο συμβαίνει $g=0$, $\theta=0$, άρα:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{, άρα} \quad \boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

↳ νόμος του Hooke

③ Για την επαναληπτική άσκηση δείξατε ότι:

$$\begin{cases} (\dot{\theta})^2 - \frac{g}{\ell}\cos\theta = 0 \\ \ddot{\theta} - \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \quad \times\, \dot{\theta} \end{cases}$$ και ολοκληρώνω

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} - \frac{g}{\ell}\sin\theta\,\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \frac{(\dot{\theta})^2}{2} - \frac{g}{\ell}\cos\theta = C \quad \text{σταθερή}$$

↳ Αυτό είναι το σωστό (δηλ έχατε κάνει λάθος πιο πάνω)

↳ Άσκηση: Ν.Β. το λάθος

$$\int \ddot{\theta}\dot{\theta}\,dt$$

Θέτω: $u = \dot{\theta}$

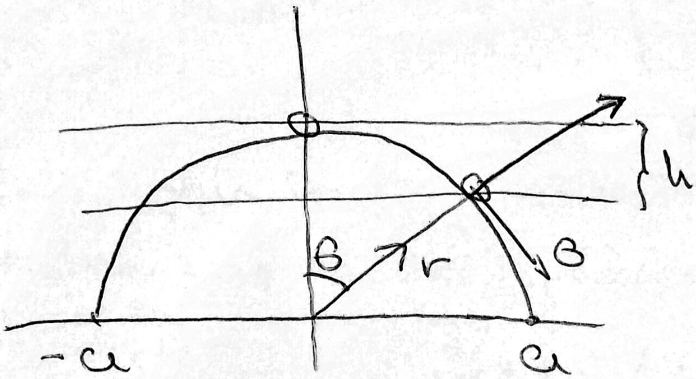
$du = \ddot{\theta}\,dt$

Οπότε: $\int u\,du = \frac{u^2}{2} = \frac{(\dot{\theta})^2}{2}$

Παράδειγμα:

Σώμα μάζας m ξεκινά από ηρεμία στην κορυφή ημισφαιρίου ακτίνας r. N.B. η γωνία στην οποία το σώμα εγκαταλείπει το ημισφαίριο.

Λύση



Κίνηση από συνθήκη:

$r=a \Rightarrow$

$$\boxed{g(r,\theta)=r-a=0}$$

$h=r\cos\theta$

↳ την τυχαία χρονική στιγμή έχω πέσει κατά τόσο

Κινητική ενέργεια:

$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$

Δυναμική ενέργεια:

$V=mgr\cos\theta$

Λαγκρανζιανή:

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-mgr\cos\theta.$$

Οι εξισώσεις Euler υπό συνθήκη:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot r} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial r} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \theta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial \theta} = 0 \\[2ex] g(r,\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{r = a} \end{cases}$$

<u>Αντικαθιστώ:</u>

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m 2 r \dot\theta^2 - mg\cos\theta - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m 2 \dot r\right) + \lambda = 0 \\ mgr\sin\theta - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m r^2 2\dot\theta\right) + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} r\dot\theta^2 - g\cos\theta - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cancel{2}} 2\dot r\right) + \frac{\lambda}{m} = 0 \\ gr\sin\theta - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cancel{2}} r^2 \cancel{2}\dot\theta\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r\dot\theta^2 - g\cos\theta - \ddot r + \frac{\lambda}{m} = 0 \\ gr\sin\theta - 2r\dot r\dot\theta - r^2\ddot\theta = 0 \end{cases} \xRightarrow{r=a}$$

$$\begin{cases} a\dot\theta^2 - g\cos\theta + \frac{\lambda}{m} = 0 \\ ga\sin\theta - a^2\ddot\theta = 0 \Rightarrow \ddot\theta - \frac{g}{a}\sin\theta = 0 \quad \times\dot\theta \text{ ολοκληρώνω.} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(\dot\theta)^2 + \frac{g}{a}\cos\theta = c$$. Γνωρίζω $\theta = 0 \Rightarrow \dot\theta = 0$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{g}{a}}$$

$(\dot{\theta})^2 = \frac{2g}{a} - \frac{2g}{a}\cos\theta$ και αντικαθιστώ στη πρώτη εξίσωση:

$a(\dot{\theta})^2 - g\cos\theta + \frac{\lambda}{m} = 0 \Rightarrow 2g - 2g\cos\theta - g\cos\theta + \frac{\lambda}{m} = 0 \Rightarrow$

$2g - 3g\cos\theta + \frac{\lambda}{m} = 0 \Rightarrow \boxed{g(2-3\cos\theta) + \frac{\lambda}{m} = 0}$

- Τη στιγμή που εγκαταλείπει το ημισφαίριο παύει και ο περιορισμός που θέτω στο πρόβλημα. Δηλαδή: $\lambda = 0$

και για αυτή τη χρονική στιγμή:

$g(2-3\cos\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{\cos\theta = 2/3}$

Παρατηρήσεις:

- ① Το αποτέλεσμά μας είναι ανεξάρτητο της ακτίνας του κύκλου και της μάζας του σωματιδίου.

② Σταθερά λ αντιστοιχεί στην αντίδραση του ημισφαιρίου στη μάζα. Η μάζα εγκαταλείπει το ημισφαίριο όταν η αντίδραση αυτή μηδενίζεται.